Forblad

Jærnprocentens Indflydelse paa Jærnbetonpladers Bæreevne. Skrevet som Erstatning for den i Forfatterens Bog om Jærnbeton S. 76-79 givne Fremstilling

E. Suenson

Tidsskrifter

Særtryk af Ingeniøren. 1912. nr. 72

1912

Jærnprocentens Indflydelse paa Jærnbetonpladers Bæreevne.

Af Docent, Ingeniør **E. Suenson,** M. Ing. F.

Naar man knækker Jærnbeton-Plader med forskellige Armeringsprocenter og beregner Brudspændingerne efter de almindelige Formler, viser det sig, som bekendt, at Jærnspændingen i svagt armerede Plader bliver større end Jærnets Trækstyrke, men aftager med voksende Armeringsprocent, først hurtigere, senere langsommere. Betonspændingen forholder sig omvendt, idet den i svagt armerede Plader ligger langt under Betonens Terningestyrke og vokser sammen med Armeringsprocenten, indtil denne har naaet en vis Grænse, der ligger des højere, jo stærkere Betonen er. Foroges Armeringsprocenten ud over denne Grænse, vil, som paavist ved de i »Ingeniøren« 1911, Side 209, offentliggjorte Forsøg, Betonspændingen forblive konstant, mens Jærnspændingen stadig aftager.

De saaledes fundne Spændinger er selvfølgelig rent formelle, den reelle Jærnspænding kan næppe stige væsentlig over den ved et direkte Trækforsøg fundne Styrke, og den reelle Betonspænding i Brudøjeblikket er formentlig meget nær den samme i alle Pladerne, altsaa uafhængig af Jærnprocenten og alene afhængig af Betonens Kvalitet[1]).

Grunden til, at Formlerne giver falske Værdier, beror paa forskellige Forhold, som det her skal være Opgaven at rede ud fra hverandre, og dertil kræves først og fremmest en Undersøgelse af Formlernes Egenskaber.

1. De almindelige Formler.

Den neutrale Akses Beliggenhed bestemmes af Formlen:

$$\frac{x}{h} = -\frac{n\varphi}{100} + \sqrt{\frac{n\varphi}{100}\left(2 + \frac{n\varphi}{100}\right)}, \tag{1}$$

hvor x er Afstanden fra Pladens Overside, h Nyttehøjden, φ Jærnprocenten og n Forholdet mellem Jærnets og Betonens Elasticitetskoefficienter $\left(n = \frac{E_j^t}{E_b^c}\right)$. Naar x er fundet af denne Ligning, har man, at Momentarmen (Afstanden mellem Træk- og Trykcentret) er:

$$\mu = h - \frac{x}{3}\ ^{1)} \tag{2}$$

og følgelig Jærnspændingen:

$$\sigma_j = \frac{M}{f \cdot \mu}, \tag{3}$$

hvor M er Momentet i kg cm, og f Jærnindlæget. Endelig findes Betonspændingen:

$$\sigma_b = \frac{2M}{b \cdot x \cdot \mu}, \tag{4}$$

hvor b er Pladebredden i cm. Dette Udtryk kan ogsaa bringes paa Formen:

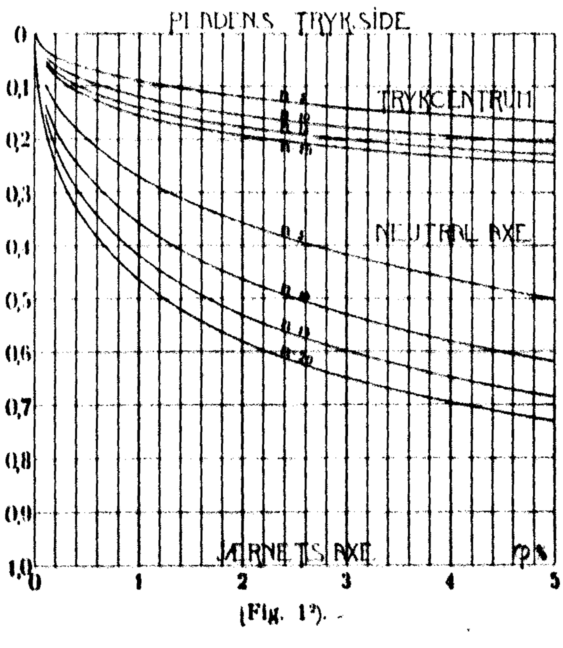
$$\sigma_b = \frac{\sigma_j}{\gamma}, \tag{5}$$

hvor

$$\gamma = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + \frac{100}{\varphi}\right)}. \tag{6}$$

Til givne Værdier af n og φ svarer der altsaa en bestemt Beliggenhed af den neutrale Akse og en bestemt Værdi af Forholdet mellem σ_j og σ_b.

Som Regel sættes $n = \frac{E_j}{E_b} = 15$; det skal nu undersøges, hvilken Virkning det har paa de formelle Spændinger, at n forudsættes større eller mindre.



(Fig. 1[1]).

I Fig. 1 angiver de 4 nedre Kurver den neutrale Akses Beliggenhed i Plader, hvis Jærnprocent varierer fra 0 til 5. Den øverste vandrette Linie svarer til Pladens

---

[1]) Hertil maa dog bemærkes, at da Betonens Svind under Hærdningen hæmmes af Jærnet, vil dette faa Tryk- og Betonen Trækspændinger. Er der saaledes i Pladens Overside paa Forhaand en Trækspænding σ_b^t, mens den af Belastningen fremkaldte Trykspænding er σ_b^c, saa vil Bruddet først indtræde, naar $\sigma_b^c - \sigma_b^t$ har naaet Betonens Brudstyrke (Bjælkestyrke), og da σ_b^t aftager med Jærnprocenten, vil den Værdi af σ_b^c, der fremkalder Brud, ligeledes aftage med Jærnprocenten. Man kunde derfor befrygte, at de stærkt armerede Kontrolbjælker leverede Værdier, der

verne angiver derfor den neutrale Akses Afstand fra Pladens Overside i Brøkdele af Nyttehøjden eller $\frac{x}{h}$; Værdierne er beregnede af Formel (1). Kurven $n = 15$ er den, der almindeligvis regnes med, og den viser, at til $\varphi = 0{,}75$ pCt. (Spændingsforhold $^{40}/_{1000}$) svarer $x = 0{,}375\,h$; endvidere ses, at x vokser med Jærnprocenten i Overensstemmelse med Regelen, at Jærnet tiltrækker den neutrale Akse.

Hvis man indfører $n = 20$ i Stedet for $n = 15$, giver Formel (1) den viste Sænkning af den neutrale Akse. Dette er umiddelbart indlysende, thi at forøge n svarer til at regne med en større Virkning af Jærnet og har derfor samme Indflydelse paa den neutrale Akses Beliggenhed som en Forøgelse af Jærnprocenten; i en Plade med 2 pCt. Jærn og $n = 15$ ligger den neutrale Akse paa samme Sted som i en Plade med 1,5 pCt. Jærn og $n = 20$, hvilket fremgaar af Fig. 1 eller direkte af Formel (1), idet $\frac{x}{h}$ alene er afhængig af Produktet $n \cdot \varphi$.

Omvendt ser man, hvorledes den neutrale Akse hæver sig ved Indførelse af $n = 10$ og $n = 5$.

Da Trykcentrets Afstand fra Pladens Overside er lig med $^1/_3$ af den neutrale Akses Afstand, varierer de to Afstande paa ganske samme Maade med n og φ; de 4 øvre Kurver viser Variationen, og vi indprenter os, at Momentarmen aftager saavel med voksende n som med voksende φ.

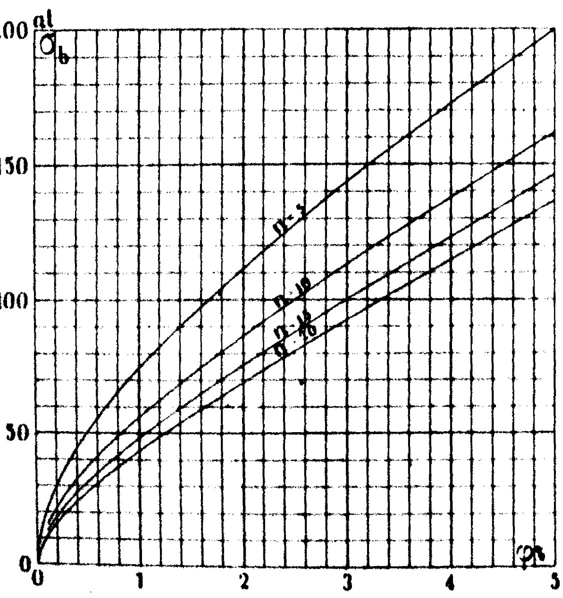


Fig. 2.

I en Plade med given Højde og givet Jærnindlæg og paavirket af et givet Moment er Jærnspændingen i Henhold til Formel (3) omvendt proportional med μ og vokser altsaa sammen med n; σ_b er derimod i Henhold til Formel (4) omvendt proportional med baade μ og x, og da x varierer stærkere med n, end μ gør (den totale Trykkraft bliver større, men fordeles samtidig over et langt større Areal), vil σ_b aftage med voksende n.

Har man en Række Plader med samme Højde og Bredde, men med forskelligt Jærnindlæg, og paavirkes de alle af samme Moment, saa vil selvfølgelig baade σ_b og σ_j aftage med voksende φ. σ_b aftager dog i langt ringere Grad end σ_j, thi mens Trækarealet direkte forøges ved mere Jærnindlæg, forøges Trykarealet kun som Følge af den neutrale Akses Sænkning. Forholdet mellem σ_b og σ_j vil derfor vokse sammen med φ, og man faar et godt Overblik over Forholdene ved at tænke sig de nævnte Plader paavirkede af ulige store Momenter, saaledes at σ_j i dem alle bliver lig 1000^{at}; σ_b vil da faa de i Fig 2 viste Værdier, der stiger stærkt med voksende φ, men aftager med voksende n, som ovenfor bemærket[1]).

Hvis en Plade med $\varphi = 0{,}75$ pCt. er paavirket af et Moment, der, under Forudsætning af $n = 15$, giver Spændingerne 40 og 1000, vil en Beregning under Forudsætning af $n = 5$ give Spændingerne 59,7 og 951. Valget af n har saaledes stor Indflydelse paa den formelle Betonspænding, men ringe Indflydelse paa den formelle Jærnspænding.

Forsøg har vist, at naar Jærnprocenten ikke er unormalt stor eller lille, har Betonens Kvalitet kun ringe Indflydelse paa Pladens Brudbelastning, denne afhænger hovedsagelig af Jærnprocenten. En Fordobling af Jærnprocenten vil tilnærmelsesvis fordoble Pladens Bærevne, mens en Fordobling af Betonens Styrke kun har en ringe Virkning. Da det altsaa er den tilladelige Jærnspænding og ikke den tilladelige Betonspænding, der bestemmer Pladens Sikkerhedsgrad, er denne saa godt som uafhængig af, hvilket n vi indfører i Dimensioneringsformlerne. Er de tilladelige Spændinger 40 og 1000, viser Fig. 2, at man med n lig 5, 10, 15 og 20 kommer til Plader med henholdsvis 0,33, 0,57, 0,75 og 0,89 pCt. Jærn; disse Plader faar forskellig Højde, men deres Brudbelastninger vil være saa godt som ens. Sammenligner vi Forholdene med Forholdene ved Dimensionering af valsede Jærnbjælker, vil Indførelsen af $n = 15$ svare til at bruge et Normalprofil, og $n = 20$ til at bruge et bredflanget Profil. Er de tilladelige Spændinger givne, vil $n = 20$ give en Konstruktion med meget Jærn og lidt Beton, og $n = 5$ en Konstruktion med lidt Jærn og megen Beton. Valget af n kan saaledes faa økonomisk Betydning, men for Konstruktionens Sikkerhedsgrad har det ingen Betydning, idet det blot bestemmer den formelle Trykspænding i Betonen.

Det formelle σ_b og den sande Randspænding maatte falde sammen, hvis Betonen fulgte Hooke's Lov, og Tværsnittene forblev plane, og vi indførte den sande Værdi af n; og jo nøjagtigere n er, des mindre maa Differensen blive. Ønskes det derfor, at det formelle σ_b saa vidt muligt skal svare til det reelle σ_b, maa der indføres et desto større n, jo daarligere Betonen er. Naar de schweiziske Normer regner med $n = 20$ ($E_b = 105\,000^{at}$), og de franske Normer med $n = 10$ ($E_b = 210\,000^{at}$), forudsætter de altsaa henholdsvis en daarligere og en bedre Beton end de tyske, østrigske, engelske og danske Normer, der regner med $n = 15$ ($E_b = 140\,000^{at}$).

2. Specielle Formler for Brudspændingerne.

a. Parabolsk Trykdiagram.

Den tidligere anførte Formel (3):

$$\sigma_j = \frac{M}{f \cdot \mu}$$

[1]) Hvis man multiplicerer Ordinaterne med $\frac{1200}{1000}$, faar man de til $\sigma_j = 1200$ svarende Værdier af σ_b, idet Kurverne i al Almindelighed viser Variationen af $\frac{1000}{\gamma}$ eller $1000 \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_j}$.

udtrykker en fysisk Nødvendighed, der er uafhængig af enhver Teori, men μ er en ubekendt Brøkdel af h og kan kun bestemmes paa Grundlag af visse, mere eller mindre urigtige Forudsætninger. Som Regel forudsættes, at et plant Tværsnit forbliver plant, naar Bjælken bøjes, og at Betonens Trykarbejdslinie er ret, hvorved man

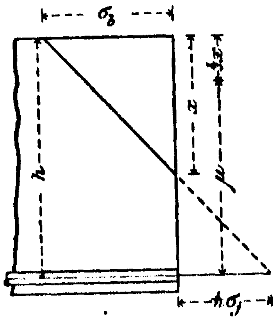


Fig. 3[1]).

kommer til det i Fig. 3 viste triangulære Trykdiagram og de almindelige Formler (1) til (6). Imidlertid er Arbejdslinien en krum Kurve, hvis Krumning vokser med Spændingen, og Fig. 3 kan derfor kun være nogenlunde rigtig, naar Spændingerne er smaa. For at faa rigtigere Formler er man gaaet ud fra, at Arbejdslinien er en Parabel med lodret Akse (Fig. 4), og at Knusningen sker,

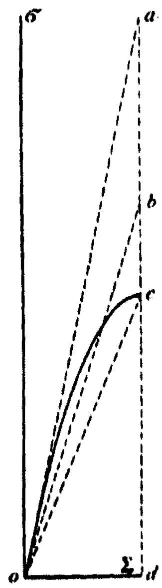


Fig. 4.

naar Spænding og Sammentrykning pr. Længdeenhed har naaet de til Parabelens Toppunkt svarende Værdier σ_{Brud} og ε_{Brud}; i Brudøjeblikket har man da $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$, hvilket utvivlsomt er i Overensstemmelse med Virkeligheden.

Naar Elasticitetskoefficienten defineres ved $E_b = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (i Modsætning til $E_b = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$), vil dens Begyndelsesværdi være lig *tangens* af Vinklen *aod*, og dens Værdi i Brudøjeblikket være lig *tangens* af Vinklen *cod*, altsaa halvt saa stor, (idet man for Parabelen har $ac = cd$). Vil man erstatte det parabolske Diagram med et triangulært af samme Areal, bliver det *obd*, hvor $bd = {}^4/_3 cd$ (bestemt af ${}^1/_2 bd = {}^2/_3 cd$). Hvis *tangens* af Vinklen *aod* er 210 000, bliver *tangens cod* = 105 000 og *tangens bod* = ${}^4/_3 \cdot 105\,000 = 140\,000$. Er Bjælken saa stærkt armeret, at Betonen knuses, førend Jærnspændingen overskrider Proportionalitetsgrænsen, vil E_j være konstant, og til de ovennævnte Værdier af E_b svarer da $n = 10$, 20 og 15. En saadan Erstatning af det parabolske Diagram med et triangulært medfører ingen Forandring i den neutrale Akses Beliggenhed, hvilket ikke er umiddelbart indlysende, men fremgaar ved Sammenligning af Ligningerne (1) og (8), thi sættes $n = 15$ i Ligning (1) og $n = 10$ i Ligning (8), finder man samme Værdier af $\frac{x}{h}$[1]).

σ_{Brud} og ε_{Brud} er forbundne ved Ligningen:

$$E_b^{\sigma=0} = \frac{2\sigma_{Brud}}{\varepsilon_{Brud}}, \tag{7}$$

hvor $E_b^{\sigma=0}$ er Betonens Elasticitetskoefficient svarende til $\sigma = 0$. Elasticitetskoefficienten vokser med Betonens Trykstyrke, og man kan passende sætte $E_b^{\sigma=0} = 1000\,\sigma_{Brud}$, hvortil svarer: $\varepsilon_{Brud} = \frac{1}{500}$ ɔ: 2 mm pr. m.

Denne Arbejdslinie fører til den i Fig. 5 viste Spændingsfordeling i Bjælkens Brudøjeblik, hvor Trykdiagrammet er lig med Arbejdslinien, blot at Maalestoksforholdene er ændrede baade for Ordinater og Abscisser; vi forudsætter jo nemlig, at Tværsnittene forbliver plane, altsaa at ε er proportional med Afstanden fra den neutrale Akse. Til Bestemmelse af de ubekendte Størrelser haves Ligningerne:

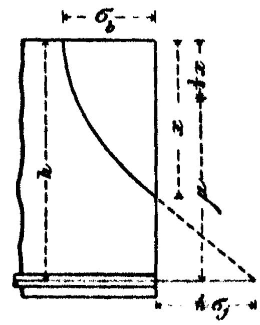


Fig. 5[2]).

$$\tfrac{2}{3} \cdot \sigma_b \cdot x \cdot b = f \cdot \sigma_j$$

$$f \cdot \sigma_j \cdot (h - \tfrac{3}{8}x) = M$$

$$\frac{x}{h-x} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_j} = \frac{\dfrac{2\sigma_b}{E_b}}{\dfrac{\sigma_j}{E_j}} = 2 \cdot \frac{E_j}{E_b} \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_j} = 2n \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_j}.$$

Man maa her lægge Mærke til, at E_b's Aftagen med voksende Spænding har fundet sit Udtryk i det parabolske Trykdiagram, og at n er en Konstant, bestemt af den til $\sigma_b = 0$ svarende Værdi af E_b. At anvende Parabelformlen sammen med $n = 15$, som det er gjort i *Handbuch für Eisenbetonbau* I, 1908, S. 257, er umotiveret.

Af Formlerne ovenfor udledes:

$$\frac{x}{h} = -\frac{1{,}5n\varphi}{100} + \sqrt{\frac{1{,}5n\varphi}{100}\left(2 + \frac{1{,}5n\varphi}{100}\right)} \tag{8}$$

[1]) Spændingstilstanden svarer til $\varphi = 4$ pCt. og $n = 10$.

[1]) Derimod bliver μ forskellig, og Forholdet mellem de til samme Moment svarende Værdier af σ_b bliver derfor ikke nøjagtig $\tfrac{3}{4}$, men $\tfrac{3}{4} \cdot \frac{h - \frac{1}{3}x}{h - \frac{3}{8}x}$ (findes af Formlerne (11) og (4)), altsaa liggende mellem $\tfrac{3}{4}$ (for $x = 0$) og $\tfrac{4}{5}$ (for $x = h$).

[2]) Spændingstilstanden svarer til $\varphi = 4$ pCt., $n = 10$ og samme Moment som i Fig. 3.

$$\mu = h - \tfrac{3}{8}x \tag{9}$$

$$\sigma_j = \frac{M}{f \cdot \mu} \tag{10}$$

$$\sigma_b = \frac{1{,}5\,M}{b \cdot x \cdot \mu} \tag{11}$$

Disse Formler kan bringes i Overensstemmelse med de for stærkt armerede Bjælker af god Beton fundne Brudbelastninger, og de har den Fordel fremfor de senere omtalte, der er baserede paa et rektangulært Trykdiagram, at de ikke bryder med Loven om de plane Tværsnit. Jeg har i »Ingeniøren« 1911, Side 214, vist, at et rektangulært Trykdiagram passer paa slige Bjælker, og jeg har nu prøvet at gennemregne de samme Bjælker (hvis Bredde var 9 cm) under Forudsætning af parabolsk Spændingsfordeling, idet jeg er gaaet ud fra, at Kantspændingen i Brudøjeblikket skulde være lig Terningestyrken (236^{at}), og saa har betragtet x, σ_j og n som ubekendte, hvorved jeg er kommen til følgende Resultater (Tabel I):

Tabel I.

Bjælketype	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
f cm². . .	0,77	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,30	7,07
φ % . . .	1,72	3,75	5,57	7,16	9,15	10,88	13,75	17,91
h cm . . .	4,97	4,65	4,71	4,87	4,77	4,81	4,28	4,39
M kgm . .	113	144	161	173	171	172	155	161
De alm. Formler med $n = 15$ giver:								
x cm . . .	2,51	2,97	3,31	3,62	3,72	3,86	3,56	3,78
σ_b at . . .	241	294	299	289	290	281	313	303
σ_j at . . .	3540	2501	1889	1500	1235	1037	947	729
Parabelformlen giver:								
x cm . . .	1,88	2,83	3,26	3,39	3,48	3,45	3,86	3,88
σ_b at . .	236	236	236	236	236	236	236	236
σ_j at . .	3450	2525	1950	1530	1250	1040	1030	775
n	4,43	8,42	9,24	7,42	7,14	5,59	20,2	12,3

Bortset fra Type VII og VIII, i hvilke den neutrale Akse falder helt nede i Jærnet, og Type I, hvorom nedenfor, er de fundne Værdier af n meget sandsynlige, de varierer ikke meget, og, hvad der er det vigtigste, der er ingen lovmæssig Variation. Dertil kommer, at en betydelig Variation af n kun har ringe Indflydelse paa Spændingerne; hvis man for Type VI sætter $n = 10$ og i Stedet for betragter σ_b som ubekendt, findes:

$$x = 3{,}86 \text{ cm}, \quad \sigma_b = 221^{at}, \quad \sigma_j = 1080^{at}.$$

Det synes saaledes, at Parabelformlen med $n = 7$ à 10 er vel egnet til at give Spændingstilstanden i Brudøjeblikket for Bjælker, der er saa stærkt armerede, at Jærnet ikke flyder. Begyndelsesværdien af E_b kan passende sættes lig 1000 Gange Terningestyrken (S^c), altsaa: $n_e = \frac{E_j}{1000\,S^c}$, eller for de nys nævnte Bjælker:

$$n = \frac{2\,100\,000}{1000 \cdot 236} = 8{,}9.$$

Hvis man derimod anvender Formlen paa saa svagt armerede Bjælker, at Jærnet flyder, inden Bruddet sker, finder man for smaa Værdier af n. For Bjælketype I i Tabellen ovenfor er n saaledes kun 4,43, og for svagere Armering synker den helt ned til 2 à 3.

b. Rektangulært Trykdiagram.

Da det parabolske Diagram med σ_b lig Terningestyrken ikke har kunnet bringes i Samklang med de Brudbelastninger, man finder for Plader med middelstore Jærnprocenter, som de bruges i Praksis, er man gaaet et Skridt videre og har tænkt sig Trykdiagrammet i Brudøjeblikket som et Rektangel (Fig. 6), men da dette strider mod Loven om de plane Tværsnit, falder det helt uden for det System, paa hvilket vore Styrkeberegninger ellers er baserede, og der er jo heller ingen Tvivl om, at det repræsenterer en Yderlighed, som Spændingsfordelingen sjældent fuldt ud naar.

Man finder:

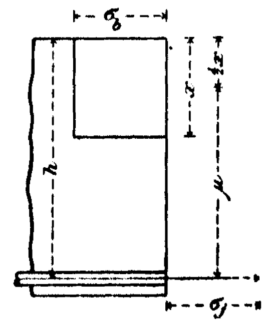


Fig. 6[1]).

$$\sigma_b \cdot x \cdot b = f \cdot \sigma_j$$

$$f \cdot \sigma_j \cdot \left(h - \frac{x}{2}\right) = M,$$

hvoraf

$$\frac{x}{h} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_b}} \tag{12}$$

$$\mu = h - \frac{x}{2} \tag{13}$$

$$\sigma_j = \frac{M}{f \cdot \mu}. \tag{14}$$

Da Forudsætningen om de plane Tværsnit er opgivet, kommer der til at mangle en Ligning, og man maa derfor kende Betonens Trykstyrke, σ_b, for at kunne bestemme x.

Jeg har i »Ingeniøren« 1911, Side 214, vist, at disse Formler kan bringes i Overensstemmelse med Brudbelastningerne for stærkt armerede Bjælker af god Beton, idet man, ved for σ_b at indføre Terningestyrken, kommer til rimelige Værdier af σ_j og x. Af Forsøg med svagere Armering foreligger der mig bekendt ingen, der er tilstrækkelig omfattende og paalidelige til at være Prøvesten for Formlerne; jeg har nedenfor gennemregnet *Sanders'* (se »*Beton u. Eisen*«, 1902, Heft. IV, Side 37), men de indeholder mange Tilfældigheder, da der kun var een Bjælke af hver Slags, og da de sande Nyttehøjder tydeligvis ikke blev maalte, eftersom de for alle Bjælkerne er angivne til 9 cm.

Sanders' Bjælker havde 2 m Spændvidde og belastedes paa Midten; Brudspændingerne findes i Tabel II, dels beregnede af de almindelige Formler, dels under Forudsætning af rektangulært Trykdiagram og σ_b lig Terningestyrken. For to af de svage Betonsorter findes

[1]) Spændingstilstanden svarer til φ = 4 pCt. og samme Moment som i Fig. 3 og 5. σ_b er forudsat at være den samme som i Fig. 5.

TABEL II.

		Jærnprocent 1,39	1,59	1,86	2,22	2,78	Betonens Art
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	209	211	234	245	310	1 : 2 : 2, 92—105 Døgn, $S^c = 258^{at}$
	$\sigma_j =$	3817	3506	3514	3267	3532	
Rektangulært Diagram	$\sigma_b =$	258	258	258	258	258	
	$\sigma_j =$	3510	3260	3290	3070	3420	
	$x =$	1,70	1,81	2,13	2,38	3 1	
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	190	196	210	226	276	1 : 2 : 2, 31—32 Døgn, $S^c = 199^{at}$
	$\sigma_j =$	3467	3224	3157	3007	3125	
Rektangulært Diagram	$\sigma_b =$	199	199	199	199	199	
	$\sigma_j =$	3270	3060	3040	2980	3160	
	$x =$	2,05	2,20	2,55	2,99	3,97	
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	200	215	225	254	280	1 : 2, 89 Døgn, $S^c = 247^{at}$
	$\sigma_j =$	3632	3584	3385	3387	3212	
Rektangulært Diagram	$\sigma_b =$	247	247	247	247	247	
	$\sigma_j =$	3340	3350	3180	3240	3060	
	$x =$	1,69	1,94	2,15	2,62	3,10	
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	178	184	186	214	224	1 : 2, 28 Døgn, $S^c = 200^{at}$
	$\sigma_j =$	3245	3074	2790	2850	2563	
Rektangulært Diagram	$\sigma_b =$	200	200	200	200	200	
	$\sigma_j =$	3020	2900	2640	2750	2430	
	$x =$	1,89	2,07	2,20	2,75	3,04	
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	215		200	200	190	1 : 3 : 3, 92 Døgn, $S^c = 121^{at}$
	$\sigma_j =$	3935		2917	2584	2159	
Rektangulært Diagram	$\sigma_b =$	121		121	121	121	
	$\sigma_j =$	4375		3190	2895	2320	
	$x =$	4,52		4,40	4,78	4,79	
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	165	160	163	175	185	1 : 3 : 3, 33—34 Døgn, $S^c = 70^{at}$
	$\sigma_j =$	3106	2626	2447	2387	2103	
Rektangulært Diagram		giver imaginære Værdier af x.					
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	198	202	202	180	170	1 : 3, 93—94 Døgn, $S^c = 78,5^{at}$
	$\sigma_j =$	3624	3350	3025	2397	1985	
Rektangulært Diagram		giver imaginære Værdier af x.					
Triangulært Diagram $n = 15$	$\sigma_b =$	150	145	131	120	130	1 : 3, 31 Døgn, $S^c = 75,3^{at}$
	$\sigma_j =$	2749	2419	1968	1593	1486	
Rektangulært Diagram	$\sigma_b =$	75,3	75,3	75,3	75,3	75,3	
	$\sigma_j =$	328[illegible]	2920	2260	1760	1710	
	$x =$	5,44	5,54	5,00	4,66	5,68	

x imaginær, hvilket vil sige, at selv om der paa hele det Betonareal, der ligger over Jærnets Akse, findes en Trykspænding lig Terningestyrken, er Bjælken ude af Stand til at optage det Moment, som den faktisk har været udsat for. Hvis Terningerne var blevne savede ud af Bjælkerne, vilde dermed Beviset være fort for, at Trykstyrken er større ved Bøjning end ved direkte Tryk, men Terningerne blev støbte for sig, og Enkeltværdierne af deres Styrke er saa variabel, at man ikke kan tillægge Middeltallet stor Betydning. Alene paa Grundlag af disse Forsøg bør man derfor ikke forkaste Postulatet, at Betonens Trykstyrke er uafhængig af Jærnprocenten.

3. De sande Spændinger i Plader med forskellig Armering.

Vi vil nu søge at danne os et Overblik over, i hvilket Forhold Formlerne staar til Virkeligheden, og det opnaas lettest ved at gennemregne 5 simple Pladetyper med forskelligt Jærnindlæg.

Vi forudsætter da at have støbt 5 Bjælker med det i Fig. 7 viste Tværsnit, altsaa 10 cm brede, 12 cm høje

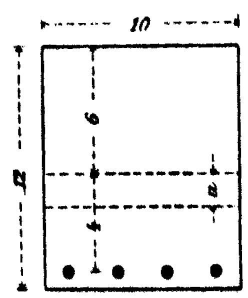


Fig. 7.

og med Jærnindlæget liggende 10 cm fra Oversiden. Den ene Bjælke er uarmeret, de andre er armerede med henholdsvis 0,1, 0,17, 1 og 5 cm² Jærn, svarende til $\varphi = 0,1$, 0,17, 1 og 5 pCt. Jærnets Proportionalitetsgrænse er 2200^{at}, Flydegrænsen 2800^{at} og Brudgrænsen 4000^{at}. Betonens Kvalitet er absolut ens i alle Bjælker, og paa Prøvedagen er dens Terningestyrke 200^{at}. Vi forudsætter endvidere, at Bjælkerne brydes i det midterste Tværsnit som Følge af Normalspændingerne, og vi gaar ud fra, at Betonen knuses, naar Kantspændingen har naaet Terningestyrken. Der er ingen Svindspændinger i Bjælkerne.

Den uarmerede Bjælke.

Vi forudsætter, at denne Bjælke gaar i Stykker for Momentet 6000 kg cm. Modstandsmomentet paa Grundlag af Hooke's Lov er $W = {}^1/_6 \cdot 10 \cdot 12^2 = 240 \text{ cm}^3$, og Bøjningsstyrken følgelig $\frac{6000}{240} = 25^{at}$ ɔ: $^1/_8$ af Terningestyrken. Da de andre Bjælker har samme Tværsnit, maa de ogsaa revne, naar Bøjningsspændingen i deres Underside, bestemt paa samme Maade som her, har naaet Værdien $\sigma_b^t = 25^{at}$, uanset at Betonen ikke følger Hooke's Lov, naar blot der ingen Svindspændinger er, og naar blot vi er i Stand til at bestemme den sande Jærnspænding.

Forsøg har vist, at Betons Trækstyrke meget nær er lig Halvdelen af Bøjningsstyrken, samt at Brudforlængelsen gerne ligger mellem 0,1 og 0,2 mm pr. m[1]), og vi vil derfor forudsætte, at Bjælkens Underside i Brudøjeblikket havde forlænget sig 0,15 mm pr. m og samtidig havde Trækspændingen $^1/_2 \cdot 25 = 12{,}5^{at}$; hertil svarer en Elasticitetskoefficient for de yderste Fibre i Brudøjeblikket af $E_b^t = 12{,}5 : \frac{0{,}15}{1000} = 83\,300^{at}$. Lidt fra Undersiden, hvor Jærnet ligger, kan man da regne $E_b^t = 84\,000^{at}$ eller $\frac{84\,000}{2\,100\,000} = \frac{1}{25}$ af Jærnets.

Bjælken med 0,1 pCt. Jærn.

Ved Bestemmelsen af denne Bjælkes Modstandsmoment regner vi altsaa $E_b^t = \frac{1}{25} E_j^t$ og forudsætter samtidig, at Hooke's Lov gælder.

Kaldes Afstanden mellem Tværsnittets Midtlinie og den neutrale Akse u (Fig. 7), bestemmes denne Afstand af Ligningen:

$$10 \cdot 12 \cdot u = 25 \cdot 0{,}1 \cdot (4 - u),$$

hvoraf $u = 0{,}082$ cm.

Tværsnittets Inertimoment bliver:

$$I = {}^1/_{12} \cdot 10 \cdot 12^3 + 120 \cdot 0{,}082^2 + 25 \cdot 0{,}1 \cdot 3{,}918^2$$
$$= 1440 + 0{,}81 + 38{,}4 = 1479,$$

og Modstandsmomenterne med Hensyn til Bjælkens Overside og Underside og m. H. t. Jærnets Plan:

$$W_0 = \frac{1479}{6{,}082} = 243, \quad W_u = \frac{1479}{5{,}918} = 250, \quad W_j = \frac{1479}{3{,}918} = 378.$$

Det Moment, der fremkalder Bøjningsspændingen 25^{at} i Bjælkens Underside og bringer denne til at revne, vil følgelig være $M = 25 \cdot W_u = 25 \cdot 250 = 6250$, og samtidig vil Betonspændingen i Oversiden være $\sigma_b^c = \frac{6250}{243} = 25{,}7^{at}$ og Jærnspændingen: $\sigma_j = \frac{6250}{378} \cdot 25 = 414^{at}$.

I det Øjeblik, Betonen revner, er den totale Trækkraft (=den totale Trykkraft): $^1/_2 \cdot 25 \cdot 6{,}082 \cdot 10 = 760$ kg. Jærnet kan kun optage $0{,}1 \cdot 4000 = 400$ kg og vil følgelig springe i samme Øjeblik, som Betonen revner. Hvis man i dette Tilfælde vilde bruge de almindelige Formler (1) til (4), altsaa undlade at tage Hensyn til Betonens Trækspændinger, vilde man naturligvis komme til et ganske meningsløst Resultat for Jærnspændingens Vedkommende, nemlig:

$$x = 0{,}159\,h, \quad \mu = 0{,}947\,h, \quad \sigma_j = \frac{6250}{0{,}1 \cdot 9{,}47} = 6600^{at},$$

$\sigma_b = 83^{at}$, naar $n = 15$.

Bjælken med 0,17 pCt. Jærn.

Paa samme Maade som i forrige Tilfælde findes $u = 0{,}137$ cm og $I = 1506$ cm^4, altsaa:

$$W_0 = \frac{1506}{6{,}137} = 246, \quad W_u = \frac{1506}{5{,}863} = 257, \quad W_j = \frac{1506}{3{,}863} = 390.$$

Bjælken vil følgelig revne for $M = 25 \cdot 257 = 6425$ kgcm, og samtidig vil Betonspændingen i Oversiden være $\sigma_b^c = \frac{6425}{246} = 26{,}1^{at}$ og Jærnspændingen $\sigma_j = \frac{6425}{390} \cdot 25 = 412^{at}$.

Hvis man i dette Tilfælde bruger de almindelige Formler med $n = 15$, findes:

$$x = 0{,}202\,h, \quad \mu = 0{,}933\,h, \quad \sigma_j = \frac{6425}{0{,}17 \cdot 9{,}33} = 4060^{at},$$
$$\sigma_b = 68{,}2^{at}.$$

Da det tidligere er paavist, at Valget af n ingen væsentlig Indflydelse har paa den formelle Værdi af σ_j, kan man gaa ud fra, at den fundne Værdi meget nær er den sande, og Jærnet vil altsaa ogsaa her springe, saa snart Betonen er revnet, men der er intet nævneværdigt Overskud af Trækkraft, saaledes som i forrige Tilfælde. Det er nemt at regne ud, hvor stor Fejlen i σ_j kan være, thi μ kan aldrig blive større end 10 cm, og til denne Værdi svarer $\sigma_j = \frac{6425}{0{,}17 \cdot 10} = 3780^{at}$.

[1]) Spørgsmaalet om den armerede Betons Brudforlængelse maa nu siges at være nogenlunde oplyst. Da Jærnet ikke deltager i Betonens Rumfangsændringer under Hærdningen, opstaar der indre Spændinger, hvis Størrelse vokser med Jærnprocenten, og hvis Natur (Træk eller Tryk i Betonen) bestemmer, om Brudforlængelsen formindskes eller forøges. Ved Vandhærdning vil Betonen udvide sig og faa Trykspændinger, mens Jærnet strækkes, følgelig forøges Betonens Brudforlængelse med en til Trykspændingerne svarende Størrelse. *Bach* har direkte paavist de indre Spændingers Betydning ved at indstøbe Jærnet i strakt Tilstand, ($\sigma_j = 600^{at}$), hvorved den Belastning, der fremkaldte Revner, steg med ca. 50 pCt. Ved Lufthærdning svinder Betonen, hvorved Forholdet vendes om; eetaarige, armerede Bjælker, hærdnede henholdsvis i Luft og i fugtigt Sand, revnede ved Belastninger, der forholdt sig som 57 til 100. Armerede Trækprøvelegemer bliver stærkere (revner senere) ved Vandhærdning end ved Lufthærdning, armerede Trykprøvelegemer forholder sig omvendt. De store Brudforlængelser, som *Considère* har fundet (indtil 2 mm pr. m eller 20 Gange den uarmerede Betons), er ganske vist ikke blevne bekræftede i Tyskland, idet *Bach* kun er kommen op paa 0,3 – 0,4 mm pr. m, men da *Considère* muligvis har eksperimenteret med en højere Jærnprocent og formentlig med en finkornet Mørtel, der udvider sig langt mere end en grovkornet Beton, kan han godt have fundet væsentlig højere Værdier end *Bach*.

Den øvre Grænse for Bjælkens Bæreevne kan bestemmes paa følgende Maade: Jærnet kan højst optage $0{,}17 \cdot 4000 = 680$ kg, og Trykkraften i Bjælkens Overside kan derfor ikke overstige denne Værdi; μ faar sin største Værdi, naar Trykdiagrammet er rektangulært, og Trykspændingen er 200^{at}; Trykzonens Højde bliver i dette Tilfælde: $x = \frac{680}{10 \cdot 200} = 0{,}34$ cm, altsaa $\mu = 10 - \frac{0{,}34}{2} = 9{,}83$ cm; det absolut største Moment, Bjælken kan optage, er følgelig $680 \cdot 9{,}83 = 6690$ kgcm ɔ: 4 pCt. højere end det Moment, for hvilket den revnede.

Resultaterne for de to svagt armerede Bjælker viser, at de almindelige Formler (1) til (4) er absolut ubrugelige til at bestemme Brudspændingerne i Bjælker, hvis Armeringsprocent er lavere end 0,17, forudsat at Betonens Bøjningsstyrke er 25^{at}; er Bøjningsstyrken mindre, vil Formlerne ogsaa kunne anvendes ved lavere Armeringsprocenter, er Bøjningsstyrken større, vil de først kunne anvendes ved højere Armeringsprocenter. Da Bøjningsstyrken godt kan naa op til 50^{at}, maa man være forberedt paa, at endnu ved 0,3 pCt. Armering og mere kan det være Betonen og ikke Jærnet, der bestemmer Brudmomentet.

Denne lidet indviklede Aarsag til de høje formelle Jærnspændinger, man finder ved Bøjningsforsøg med svagt armerede Bjælker, er længe bleven overset, begrundet i, at de fleste Forsøg gøres paa Prøvemaskiner, der paatvinger Bjælken en given Nedbøjningstilvækst pr. Tidsenhed og angiver den dertil fornødne Kraft. I det Øjeblik, Betonen revner, styrter Bjælken altsaa ikke ned, som den vilde i Praksis; Belastningen bliver blot mindre som Følge af den stærke Nedbøjning, og Jærnet kan derfor holde over for det formindskede Moment og springer først efter lang Tids Flyden, hvorved man faar det Indtryk, at Jærnets Styrke er større end Betonens. Undertiden springer Jærnet slet ikke, naar Forsøget gøres paa Maskine, idet Flydningen lidt efter lidt forplanter sig hen til Bjælkens Ender, saa at Forbindelsen med Betonen ophæves, og Jærnet tilsidst glider (se f. Eks. *Kleinlogel's* Forsøg med Bjælkeklasse B i »*Beton u. Eisen*« 1904, S. 227[1]).).

Naar man i visse Tilfælde har fundet saa høje, formelle Jærnspændinger, at de ikke kan forklares paa den ovenfor angivne Maade, maa Grunden være den, at Friktionen mellem Bjælken og dens Understøtninger har fremkaldt et Horisontaltryk, der aflaster Jærnet. Jeg tror, at dette Horisontaltryk spiller en væsentlig Rolle ved alle Forsøg med høje, svagt armerede Bjælker, naar Forsøgsindretningerne er primitive.

Bjælken med 1 pCt. Jærn.

Paa samme Maade som i forrige Tilfælde findes $u = 0{,}69$ cm og $I = 1771$ cm^4, altsaa:

$$W_0 = \frac{1771}{6{,}69} = 265, \quad W_u = \frac{1771}{5{,}31} = 334,$$
$$W_j = \frac{1771}{3{,}31} = 536.$$

Bjælken vil følgelig revne for $M = 25 \cdot 334 = 8350$ kg cm, og samtidig vil Betonspændingen i Oversiden være $\sigma_b^c = \frac{8350}{265} = 31{,}5^{at}$ og Jærnspændingen $\sigma_j = \frac{8350}{536} \cdot 25 = 390^{at}$.

Hvis vi i dette Tilfælde bruger de almindelige Formler med $n = 15$, findes:

$$x = 0{,}418\,h, \quad \mu = 0{,}86\,h, \quad \sigma_j = \frac{8350}{1 \cdot 8{,}6} = 971^{at}, \quad \sigma_b = 46{,}5^{at}.$$

Denne Bjælke vil altsaa ikke styrte ned i det Øjeblik, den revner; Jærnet vil optage hele Trækkraften, og den opstaaede Revne vil knap være synlig. Den fundne Jærnspænding vil paa det nærmeste være rigtig, derimod er Værdien af σ_b rent formel og betinget af Valget $n = 15$.

Belastes mere, vil Revnen blive lidt tydeligere, efterhaanden som Jærnspændingen stiger, og denne kan stadig findes af den almindelige Formel, indtil den naar Proportionalitetsgrænsen, 2200^{at}. Naar Momentet er blevet saa stort, at det giver $\sigma_j = 2200^{at}$, begynder Jærnets Forlængelse at vokse hurtigere end dets Spænding. Det nævnte Moment er $8350 \cdot \frac{2200}{971} = 18\,910$ kg cm, og den tilhørende formelle Betonspænding: $\sigma_b = 46{,}5 \cdot \frac{2200}{971} = 105{,}2^{at}$.

Indtil nu har Jærnets Elasticitetskoefficient været konstant lig $2\,100\,000^{at}$, og da vi stadig har regnet $n = 15$, har vi altsaa ogsaa forudsat Betonens Elasticitetskoefficient konstant og lig $140\,000^{at}$. I Virkeligheden har E_b^c været i Aftagende med voksende Spænding, og Middelværdien af n har vel snarere været 10 end 15. At E_j^t nu begynder at aftage, og dermed n, vil altsaa snarere forøge end formindske Formlernes Rigtighed, saa at man lige saa vel over som under Proportionalitetsgrænsen kan beregne den sande Jærnspænding nogenlunde nøjagtig. Man kan derfor ogsaa beregne det Moment, for hvilket σ_j naar Flydegrænsen, 2800^{at}, nemlig $M = 8350 \cdot \frac{2800}{971} = 24\,070$ kg cm og den tilhørende for-

[1]) I *Kleinlogel's* første Offentliggørelse (Forscherarbeiten aus dem Gebiete des Eisenbetons, Heft 1, S. 17) angaves Bjælkerne B at revne ved Belastninger mellem 3600 og og 3900 kg, men i en senere Artikel (se ovenfor) opgav han andre Tal, nemlig 3800 og 3980 kg. Denne Uoverensstemmelse har paavirket det Referat af Forsøgene, jeg har givet i min Bog om Jærnbeton Side 76—79, og faaet mig til at drage falske Slutninger, som jeg benytter Lejligheden til at rette. I Tabellen Side 78 skal der ud for Bjælkerne B i Kolonnen »2 P_R i pCt. af 2 P_s« ikke staa »92—100«, men »100«, idet disse Bjælkers Belastning faktisk ikke kom op over den Belastning, ved hvilken de revnede. (At denne Belastning var større for Bjælkerne B end for de uarmerede Bjælker A, maa skyldes Begyndelsesspændinger i Bjælkernes Underside, fremkaldte ved, at Jærnet har forhindret Betonen i at udvide sig (vaad Hærdning), samt muligvis en vis egaliserende Virkning af Jærnet paa Betonen.) Det første Punkt paa Kurven i Fig. 47 i min Bog falder derved bort, eftersom det er uafhængig af φ (den første Del af Kurven bliver en næsten vandret Linie), og de to resterende kan godt bringes til at ligge paa en ret Linie gennem Begyndelsespunktet, naar man blot forudsætter, at der er en ringe Fejl i deres Bestemmelse. I Bjælkerne B til E var Jærnets Flyden den primære Brudaarsag, der fremkaldte Glidning i Bjælkerne B til D og Knusning i E. Jærnspændingen i Bjælkerne F og G kom ikke op over Flydegrænsen, men Bruddet skyldtes dog ikke Knusning, men Glidning og Forskydning.

melle Betonspænding $\sigma_b = 46{,}5 \cdot \frac{2800}{971} = 134^{at}$. Med $n = 10$ vilde vi have fundet: $x = 0{,}358\ h$, $\mu = 0{,}881\ h$, $M = 2800 \cdot 1 \cdot 8{,}81 = 24\,650$ kg cm og $\sigma_j \frac{2 \cdot 24\,650}{10 \cdot 3{,}58 \cdot 8{,}81} = 156^{at}$.

I det Øjeblik, Flydegrænsen naas, er Betonen altsaa endnu langt fra at knuses.

Naar Jærnet begynder at flyde, begynder Revnerne at gabe, hvorved den neutrale Akse hæver sig; matematisk udtrykt: E_j aftager og n aftager. Derved bliver σ_b større og μ større og følgelig σ_j mindre, saa at Flydningen atter standser, indtil Belastningen forøges, hvorefter det samme vil gentage sig. Imidlertid skal der kun en ringe Flyden til, for at E_j skal synke stærkt[1]), og sættes f. Eks. $n = 5{,}45$, findes:

$x = 0{,}28\ h$, $\mu = 0{,}907\ h$, $M = 2800 \cdot 9{,}07 = 25\,400$ kg cm og $\sigma_b = \frac{2 \cdot 25\,400}{10 \cdot 2{,}8 \cdot 9{,}07} = 200^{at}$.

Det var følgelig at vente, at Betonen vilde knuses, kort efter at Jærnet begynder at flyde. Imidlertid viser de allerfleste Brudforsøg, at naar man indsætter Brudmomentet i Formlerne med $n = 15$, finder man ikke Flydegrænsen, men en væsentlig højere Værdi, ofte ca. 3500^{at}. Den foreliggende Bjælkes Brudmoment kan saaledes sættes til $3500 \cdot 8{,}6 = 30\,100$ kg cm, der giver $\sigma_b = \frac{2 \cdot 30\,100}{10 \cdot 4{,}18 \cdot 8{,}6} = 167{,}5^{at}$.

Dette Forhold tyder paa, at n alligevel ikke synker saa dybt som til 5,45, og vi vil derfor bestemme n under Forudsætning af, at Formlerne i øvrigt er rigtige og giver sande Værdier af baade σ_j og σ_b. Da Bruddet skyldes Betonens Knusning, maa vi i Brudøjeblikket have $\sigma_b = 200^{at}$, og denne Værdi i Forbindelse med $M = 30\,100$ kg cm og $\varphi = 1$ pCt. bestemmer de øvrige, nemlig:

$$x = 0{,}34\ h,\quad \mu = 0{,}887\ h,\quad \sigma_j = 3400^{at} \text{ og } n = 8{,}76.$$

Ved denne Spænding vil Jærnet have forlænget sig ca. 4 pCt., saa at $E_j = 3400 : \frac{4}{100} = 85\,000^{at}$ og $E_b = \frac{85\,000}{8{,}76} = 9700^{at}$, svarende til Forkortelsen: $\frac{200}{9700} = \frac{1}{48{,}5}$ eller 2,06 pCt. Der foreligger, mig bekendt, ingen Forsøg over Betons Sammentrykning umiddelbart før Brud, men ved 40^{at} Spænding kan den f. Eks. være 0,03 pCt., og selv om den vokser meget stærkt, naar Betonen er nær ved at knuses, kan den formentlig ikke naa op til 2,06 pCt.; under Forudsætning af den i Fig. 4 viste Arbejdslinie fandt vi kun en Brudforkortelse paa 0,2 pCt. Forudsætningerne om plane Tværsnit, Hooke's Lov og $\sigma_b = 200^{at}$ er følgelig uforenelige i Brudøjeblikket.

Prøves Parabelformlen med $\varphi = 1$ pCt., $\sigma_b = 200^{at}$ og $M = 30\,100$ kg cm, finder man:

$$x = 0{,}249\ h,\quad \sigma_j = 3320^{at},\quad n = 2{,}75,$$

altsaa $E_b = \frac{85\,000}{2{,}75} = 30\,900^{at}$, hvilket ogsaa er en urimelig lille Værdi for $\sigma_b = 0$.

Vi maa da tage vor Tilflugt til den rektangulære Spændingsfordeling, der giver:

$$x = 0{,}165\ h,\quad \mu = 0{,}917\ h,\quad \sigma_j = \frac{30\,100}{1 \cdot 9{,}17} = 3280^{at}.$$

Bjælken med 5 pCt. Jærn.

Paa samme Maade som tidligere findes: $u = 2{,}04$ cm og $I = 2419$ cm^4, altsaa:

$$W_0 = \frac{2419}{8{,}04} = 301,\quad W_u = \frac{2419}{3{,}96} = 611,\quad W_j = \frac{2419}{1{,}96} = 1233.$$

Bjælken vil følgelig revne for $M = 25 \cdot 611 = 15\,270$ kg cm, og samtidig vil Betonspændingen i Oversiden være

$$\sigma_b^c = \frac{15\,270}{301} = 50{,}7^{at} \text{ og } \sigma_j = \frac{15\,270}{1233} \cdot 25 = 309^{at}.$$

Efter at Bjælken er revnet, giver de almindelige Formler med $n = 10$:

$$x = 0{,}618\ h,\quad \mu = 0{,}794\ h,\quad \sigma_j = 385^{at},\quad \sigma_b = 62{,}5^{at}$$

og med $n = 15$:

$$x = 0{,}686\ h,\quad \mu = 0{,}771\ h,\quad \sigma_j = 396^{at},\quad \sigma_b = 57{,}7^{at}.$$

I dette Tilfælde vil Revnerne være saa fine paa Grund af den ringe Jærnspænding, at de slet ikke kan ses.

Forøges Momentet til 52 900 kg cm, altsaa til det ca. 3,5 dobbelte, giver Formlerne med $n = 15$:

$$\sigma_j = 396 \cdot \frac{52\,900}{15\,270} = 1371^{at},\quad \sigma_b = 57{,}7 \cdot \frac{52\,900}{15\,270} = 200^{at}.$$

Skønt Formlerne, som ofte nævnt, giver upaalidelige Værdier af σ_b, viser Tallene dog klart, at denne Bjælkes Brudmoment udelukkende vil afhænge af Betonens Kvalitet; Jærnspændingen vil ikke engang naa Proportionalitetsgrænsen, og E_j vil følgelig holde sig konstant helt op til Brudøjeblikket.

De allerfleste Brudforsøg med saa stærkt armerede Bjælker viser, at naar man indsætter Brudmomentet i de almindelige Formler med $n = 15$, finder man en Værdi af σ_b, der er ca. 25 pCt. højere end Betonens Terningestyrke (se f. Eks. »Ingeniøren« 1911, Side 213)[1]). Den foreliggende Bjælkes Brudmoment kan saaledes sættes til $52\,900 \cdot 1{,}25 = 66\,100$ kg cm, der giver Spændingerne $\sigma_b = 250^{at}$ og $\sigma_j = 1715^{at}$.

Hvis vi nu, ligesom for Bjælken med 1 pCt. Jærn, gaar ud fra, at Formlerne er rigtige i Princippet, og at blot n skal indføres med en anden Værdi, saa finder vi, at til $M = 66\,100$ kg cm, $\sigma_b = 200^{at}$ og $\varphi = 5$ pCt. svarer:

$$x = 0{,}987\ h,\quad \mu = 0{,}671\ h,\quad \sigma_j = 1974^{at} \text{ og } n = 750.$$

---

[1]) Ved Trækforsøg med blødt Staal vil man ofte finde, at Stangen, efter at den egentlige Flydning er ophørt, og Spændingen atter begynder at stige, har forlænget sig 2 pCt. (se *E. Suenson*: Byggematerialer, Fig. 15), saa at Elasticitetskoefficienten er sunket til $E_j = \frac{2800}{\frac{2}{100}} = 140\,000^{at}$ ɔ: samme Værdi som Betonens, altsaa $n = 1$.

[1]) Denne Værdi er i god Overensstemmelse med Diagrammet paa Fig. 4, thi, som nævnt i en Fodnote dèr, vil Parabelens Erstatning med den rette Linie *ob* medføre, at σ_b forøges med 33 à 25 pCt.

Denne Værdi af n, der svarer til $E_b^c = \frac{2\,100\,000}{750} = 2800^{at}$ er ganske udelukket, og Formlerne maa derfor være principielt forkerte, saafremt vor Forudsætning, at σ_b ikke kan overstige Terningestyrken, er rigtig.

At Formlerne er forkerte, er sikkert nok, idet de regner E_b^c konstant, mens den stadig aftager og mest for de yderste Betonfibre. Man kan derfor ikke vente at finde den sande Brudspænding, medmindre man lader n vokse fra den neutrale Akse og opefter, med andre Ord regner med et Trykdiagram, der er formet efter en Parabel eller lignende Kurve. Hvis vi i Parabelformlerne indsætter $M = 66\,100$ kg cm og $\sigma_b = 200^{at}$, findes:

$$x = 0{,}657\,h, \quad \sigma_j = 1752^{at}, \quad n = 8{,}3, \quad E_b^c = 253\,000^{at}.$$

4. De tilladelige Spændinger.

For Praksis er det af underordnet Betydning, om et parabolsk Trykdiagram med $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$ i Pladens Overside eller et rektangulært Trykdiagram kan bringes til at passe i Brudøjeblikket, da selvfølgelig ingen af dem kan bruges for ringere Belastninger. Ved Dimensionering vil man formentlig vedblive at regne med det triangulære Trykdiagram og de tilhørende Formler med n konstant, og Opgaven bliver derfor at neutralisere disse Formlers Mangler.

Hvad enten den konstante Værdi af n sættes til 10, 15 eller 20, har Formlerne den Mangel, at de, naar Brudmomentet indsættes, kun giver konstante Værdier af σ_b, naar Jærnprocenten ligger over en vis Grænse (for god Beton ca. 4 pCt.); gaar Jærnprocenten ned under denne Grænse, vil σ_b aftage sammen med den. Naar vi derfor bruger Formlerne til Dimensionering og regner med en konstant tilladelig Betonspænding af f. Eks. 40^{at}, kommer vi til Konstruktioner, der ikke har samme Sikkerhedsgrad, idet denne vokser med Jærnprocenten. Dette er selvfølgelig en Urimelighed, og for at raade Bod paa den kan man gaa to Veje.

I alle Bjælker, hvis Jærnprocent ligger under den kritiske, vil Jærnet flyde, inden Bruddet sker. Kaldes Jærnets Flydegrænse σ_F, vil den formelle Jærnspænding i Brudøjeblikket være $k \cdot \sigma_F$, hvor k altid er større end 1 og vokser med Betonens Styrke og med aftagende Jærnprocent og formentlig med Forsøgshastigheden. Om k's Variation giver følgende to Forsøgsrækker et Begreb.

Med Bjælker af ren Cement, $5\frac{1}{2}$ Maaned gamle, fandt jeg (se »Ingeniøren« 1909, Side 410):

φ pCt. =	1,52	2,29	3,28	4,08	4,72
σ_b^{at} =	270	340	440	489	562
σ_j^{at} =	4317	4111	4132	3916	4027

σ_j (og dermed k) er her stor paa Grund af Cementens store Styrke.

Med Bjælker af Beton, hvis Terningestyrke var 247^{at}, fandt Sanders (»Beton & Eisen« 1902, Heft IV, S. 87):

φ pCt. =	1,39	1,59	1,86	2,22	2,78
σ_b^{at} =	200	215	225	254	280
σ_j^{at} =	3632	3584	3385	3387	3212

Vi vil foreløbig se bort fra k's Afhængighed af φ og betragte den som en, kun af Betonen afhængig, Konstant. Under denne Forudsætning vil, naar Betonens Kvalitet er givet, alle Plader, hvis Jærnprocent ligger under den kritiske, brydes, naar den formelle Jærnspænding har naaet samme Værdi f. Eks. 3500^{at}. Med en Sikkerhedskoefficient af 3,5 bliver den tilladelige Jærnspænding 1000^{at}, og alle Plader af den paagældende Beton, der er dimensionerede paa Basis af denne Spænding, vil derfor have en Sikkerhedsgrad af 3,5, uden Hensyn til om den samtidige Betonspænding er 30 ($\varphi = 0{,}47$), 40 ($\varphi = 0{,}75$), 50 ($\varphi = 1{,}07$), 60 ($\varphi = 1{,}42$) eller endnu højere, blot φ ligger under den kritiske Værdi. I Henhold hertil skulde det være overflødigt at fastsætte en tilladelig Betonspænding, naar blot man i Stedet fastsætter en Maksimalværdi for φ, nemlig den kritiske. Imidlertid har vi overset, at Betonen er et mere variabelt Materiale end Jærnet, saa at vi for den bør have en Sikkerhedsgrad af 5 (i Forhold til Styrken af den 28 Døgn gamle Beton, Sikkerhedsgraden vil da i Tidens Løb stige til 10 og mere), hvilket bevirker, at den tilladelige Værdi af φ maa holdes lavere end den kritiske. Lad os for Eksempel sætte, at den kritiske Værdi var $\varphi = 3$ pCt., hertil svarer Spændingsforholdet $^{100}/_{1000}$ (se Fig. 2) og følgelig Brudspændingerne $\sigma_b = 350^{at}$ og $\sigma_j = 3500^{at}$. Forøges φ, vil σ_b vedvarende holde sig paa 350^{at}, mens σ_j vil aftage. Betonens formelle Brudstyrke er altsaa 350^{at}, og den tilladelige Betonspænding bliver $^1/_5 \cdot 350 = 70^{at}$.

Alle Plader, der er dimensionerede paa Grundlag af denne Værdi, vil altsaa have Sikkerhedsgraden 5, for saa vidt $\varphi > 3$, og Sikkerhedsgraden 3,5, for saa vidt $\varphi < 3$.

Imidlertid er k, som vi har set, aftagende med voksende φ, og den tilladelige Jærnspænding burde derfor samtidig aftage, men Spørgsmaalet har ringe praktisk Betydning. Lad os nemlig sætte, at de tilladelige Spændinger er 70 og 1000, hvortil med $n = 15$ svarer $\varphi = 1{,}79$; Konstruktøren vil da tilstræbe en Plade med netop denne Jærnprocent, og navnlig vil han kun ganske undtagelsesvis forøge φ (forringe Jærnspændingen), da den Formindskelse af Pladetykkelsen, der derved opnaas, købes overordentlig dyrt. Hyppigere vil det forekomme, at han sætter Betonspændingen ned for at faa en passende Pladetykkelse (altsaa forringer φ), men derved vil Sikkerhedsgraden kun forøges, og da Forøgelsen ikke er betydelig, kan Indførelsen af en variabel, tilladelig Jærnspænding ikke siges at være stærkt paakrævet.

Den her beskrevne Fremgangsmaade: at se bort fra k's Variation med φ og regne med konstante tilladelige Spændinger, af hvilke Betonspændingen bestemmes som $^1/_5$ af Kontrolbjælkernes Brudspænding, er i Overensstemmelse med de reviderede danske Jærnbetonnormer. De schweiziske Normer er gaaede en helt anden Vej, idet de indfører variable, tilladelige Spændinger baade for Beton og Jærn og ved Fastsættelsen af disse alene tager Hensyn til k's Variation med φ, mens k's Afhængighed af Betonkvaliteten lades ganske ude af Betragtning. Normerne fastsætter nemlig:

φ pCt.		0,667	1,25	2,25	4,00
Tilladelig	σ_b	40	50	60	70
—	σ_j	1200	1000	800	600

De gør det ikke just i denne Form, men ved Hjælp af Ligningen:

$$\text{Tilladelig } \sigma_b = 400 + 0{,}05\ (1200 \div \sigma_j),$$

der fører til de ovenstaaende Værdier, idet der regnes med $n = 20$. Da disse Betonspændinger maa bruges i Forbindelse med en plastisk tilberedt Beton, hvis Terningestyrke efter 28 Døgn er 150^{at}, synes de mig altfor store; den kritiske Jærnprocent for en saadan Beton ligger utvivlsomt langt under 4, og en Plade med 4,09 pCt. Jærn burde derfor have en Sikkerhedsgrad af 5, altsaa Brudspændingerne $5 \cdot 70 = 350^{at}$ og $5 \cdot 600 = 3000^{at}$, men saa højt kommer man absolut ikke op med en Beton, hvis Terningestyrke kun er 150^{at}; en Plade, der var dimensioneret paa Grundlag af Spændingerne 70 og 1200 (svarende til $\varphi = 1{,}57$ for $n = 20$), vilde være paalideligere; ganske vist er Sikkerhedsgraden vel knapt 3, men til Gengæld er den næsten uafhængig af Betonens Kvalitet.

Det tekniske Studiums Nytte.

Ingeniør *Nicolai L. Feilberg's* Artikel i »Ingeniøren« for 24. August d. A. med Referat af et Foredrag af *R. T. Crane* om ovenstaaende Emne har interesseret mig i høj Grad. Det er saa sjældent, man hører Udtalelser om, hvorledes Folk af den angelsachsiske Race ser paa Spørgsmaalet om den tekniske Undervisning, at det kun kan glæde, naar der kommer noget fra den Side. Vor Undervisning er mest paavirket af den tyske og saaledes temmelig teoretisk.

Hvad Hr. Crane særlig lægger Vægt paa, er den rette Start. Han paapeger i saa Henseende navnlig, at den videnskabelige Uddannelse kræver overordentlig lang Tid, uden at der ofres noget af Betydning paa Praksis. Da det er vanskeligt samtidig med Studiet at skaffe sig Indtægter, bliver Uddannelsen tillige meget kostbar. Disse Ulemper finder Sted, uden at der — efter Hr. Crane's Mening — opnaas nogen væsentlig Fordel for største Delen af de saaledes uddannede Ingeniører fremfor Teknikere, som har en mere praktisk Uddannelse. Heri har Forfatteren vist ogsaa Ret, idet de fleste Ingeniører kommer i Stillinger, hvor der stilles større Fordringer til de praktiske Kundskaber end til Videnskaben.

Det nævnte Hovedpunkt staar i øvrigt i Forbindelse med et andet Hovedpunkt, som fremhæves, nemlig Kendskab til Tid og Penge. Disse Begreber faar man ved den videnskabelige Uddannelse kun et højst teoretisk Kendskab til, medens det for de fleste Ingeniører er af overordentlig Betydning at have saa grundigt Kendskab til dem som overhovedet muligt, hvilket kun vanskeligt faas undtagen gennem Erfaring.

Forfatteren af Artiklen stiller sig i det hele taget overordentlig tvivlende over for den rent videnskabelige Uddannelse. Hans Argumentation forekommer imidlertid ved første Øjekast at være noget uklar; men dette skyldes mulig Ræsonnementets Simpelhed, idet det blot gaar ud paa at bedømme Forholdene efter de Resultater, de medfører, medens alle Mellemled overspringes. Til Afveksling er det interessant at se en saadan Bedømmelse lagt til Grund ved Behandlingen af Spørgsmaalet om det tekniske Studium.

Naar man saaledes ser hen til, hvorledes Industriens Stilling i Amerika er i Forhold til f. Eks. Tyskland, hvor den teoretiske Uddannelse vel nok maa anses for at blomstre i høj Grad, kan det næppe nægtes, at den førstnævnte Industri bærer Prisen. Det er vist ikke for meget sagt, at Amerika paa de fleste industrielle Omraader for Tiden er førende. Endvidere er det næppe fejl, at den amerikanske Industri kun i ringe Grad lægger Beslag paa videnskabelig uddannede Ingeniører for de ledende Stillingers Vedkommende. I saa Henseende maa Hr. Crane's Ord staa til Troende, hvilket i øvrigt ogsaa bekræftes af Folk, som er kendt med amerikanske Forhold.

At dømme efter Resultaterne synes den rent videnskabelige Uddannelse saaledes ikke at fremme et Lands Industri mere end en mere praktisk Uddannelse.

Paa den anden Side forekommer det mig, at Hr. Crane gaar altfor vidt, naar han paa Grundlag af disse Resultater bryder Staven over al videnskabelig Uddannelse og øjensynlig mener, at denne er af det onde. Det rigtige er formentlig, at den videnskabelige Uddannelse har sin store Betydning, men blot ikke maa træde hindrende i Vejen for den samtidige Udvikling af de praktiske Evner, som er lige saa nødvendige. Med det nuværende Omfang af den videnskabelige Uddannelse her i Landet vil der imidlertid kræves altfor lang Tid, naar den skal kombineres med en grundig Uddannelse i praktisk og forretningsmæssig Retning, hvorfor der — som antydet af Redaktionsudvalget — mulig bør slaas noget af paa Teorien til Fordel for Praksis.

De fleste Ingeniører, som i deres Virksomhed er komne i Berøring med praktiske Forhold, Arbejderes Udførelse, Fabrikation og lign., vil vistnok have lagt Mærke til, at det i disse Retninger har skortet dem paa Kundskaber, hvilket har medført Anvendelse af lang Tid for at faa indhentet det forsømte. Kun i de færreste Stillinger — og da kun af og til — bliver der Brug for den virkelige Videnskab.

Hvorvidt det af Hensyn til disse faa Tilfælde er rigtigt at bibeholde den videnskabelige Uddannelse i sin nuværende Udstrækning for alle Ingeniører, er tvivlsomt. Meget taler for, at den unge Ingeniør, som besidder Erfaring i praktisk Retning kombineret med noget mindre Teori, er bedst rustet til at udfylde sin Plads i Industrien.

Den 3. September 1912.

J. P. Spangenberg,
M. Ing. F.